UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.

c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces

$$\det\left((A+B)^2\right) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$.

c) (0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & 5 \\ x+z & = & 3 \end{array} \right.,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

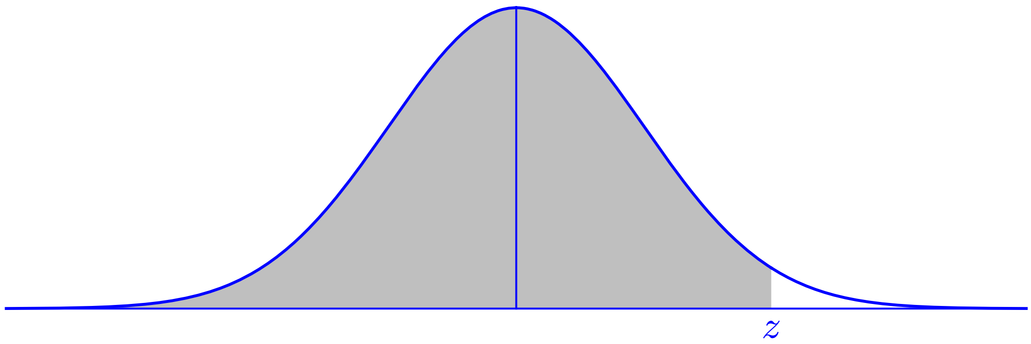
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quien friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el $25\,\%$ de sus lanzamientos y Benito en el $30\,\%$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Estudio correcto de cada caso ($\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda \neq \{1, 2\}$): 0.5 puntos por cada uno. Si únicamente se determinan los dos valores críticos ($\lambda = 1$ y $\lambda = 2$): 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos. Obtención de la solución con $x = 5$: 0.25 puntos.

A.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Justificación: 0.5 puntos.

A.3.

a) Planteamiento : 0.5 puntos. Obtención de la ecuación del plano: 0.5 puntos.
b) Planteamiento : 1 punto . Obtención del punto: 0.5 puntos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Cálculo de la probabilidad de C: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.5 puntos). Determinación de la independencia entre C y A_2: 0.5 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; determinación correcta: 0.25 puntos).

B.1.

a) Usar correctamente la hipótesis y la propiedad del determinante respecto el producto de matrices cuadradas: 0.5 puntos. Finalizar usando que $\det(A)\det(B) = \det(AB)$: 0.25 puntos.
b) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.5 puntos.
c) Discutir el sistema: 0.25 puntos. Planteamiento de la resolución: 0.25 puntos. Solución: 0.25 puntos.

B.2.

a) Comprobar que es impar: 0.25 puntos. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento: 0.5 puntos.
b) Intersección de las dos gráficas: 0.5 puntos. Determinación de la integral a calcular: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.3.

a) Determinar la posición correcta de las rectas: 0.5 puntos. Cálculo correcto de la distancia entre las rectas: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Obtención correcta de la ecuación de la recta: 0.5 puntos.

B.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Cálculo de los parámetros de la normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.5 puntos; en el caso de no aplicar la corrección por continuidad o aplicarla incorrectamente, se restarán 0.25 puntos).

MATEMÁTICAS II – SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) Sea A la matriz de coeficientes del sistema y A' la matriz ampliada. $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = 1$.
Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ Rg$(A) =$ Rg$(A') = n = 3 \Rightarrow SCD$.
Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ Rg$(A) = 2 =$ Rg$(A') < 3 \Rightarrow SCI$.
Si $\lambda = 2 \Rightarrow$ Rg$(A) = 2 \neq$ Rg$(A') = 3 \Rightarrow SI$.

b) Si $\lambda = 1$, tenemos un SCI cuyas soluciones son de la forma $(x, y, z) = (-t, 1-t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. La solución para la que $x = 5$ es por tanto $(x, y, z) = (5, 6, -5)$.

A.2.

a) Como pasa por $(0, 0)$ el término independiente es cero, y como la derivada en cero es uno, el término lineal tiene coeficiente uno. Por tanto puede ser cualquier función polinómica de la forma $p(x) = ax^2 + x$.
b) Busquemos una función polinómica de la forma $p(x) = -x^2+bx+c$ (el signo menos del coeficiente de x^2 es por tener $p(x)$ un máximo). Como $p(1) = 1 \Rightarrow -1 + b + c = 1$ y $p'(1) = 0 \Rightarrow -2 + b = 0$, se tiene que $p(x) = -x^2 + 2x$.
c) No, porque la derivada de una función polinómica de segundo grado es una función polinómica de primer grado, cuya gráfica es una recta no constante, que solo puede cortar una vez al eje x.

A.3.

a) El plano pedido es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto medio, M, del segmento que une P y Q. Se tiene que $M(3/2, 0, 1)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -4)$, con lo que el plano pedido es $x + 2y - 4z = -5/2$.
b) Se tiene que $|\overrightarrow{PQ}|^2 = 21$. Sea A el punto buscado, tenemos que $|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2 = 13$. Los puntos de la recta son de la forma $(x, y, z) = (2 + \lambda, \lambda, \lambda)$ y $A \in r$, buscamos el valor de λ tal que

$$|(2 + \lambda, \lambda, \lambda) - (1, -1, 3)|^2 + |(2 + \lambda, \lambda, \lambda) - (2, 1, -1)|^2 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 13 = 13.$$

Las soluciones son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1/3$. Así pues, el punto buscado es $A(7/3, 1/3, 1/3)$.

A.4.

a) Por la regla de la probabilidad total para el suceso B se tiene

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 0.25 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.2 = 0.3.$$

b) Los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles y $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$, por lo que $P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$.
El suceso C es independiente de A_1, luego $P(C) = P(C) \cdot P(A_1) + P(C|A_2) \cdot P(A_2) + P(C|A_3) \cdot P(A_3) = 0.4 \cdot P(C) + 0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.2$, de manera que $P(C) = \frac{0.24}{0.6} = 0.4$.
Finalmente, $P(C \cap A_2) = P(C|A_2) \cdot P(A_2) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$ no coincide con $P(C) \cdot P(A_2) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$, y así se tiene que el suceso C no es independiente de A_2.

B.1.

a) Por la propiedad del determinante respecto del producto de matrices cuadradas tenemos $\det((A+B)^2) = (\det(A+B))^2$. Esta expresión, por hipótesis, es igual $(\det A)^2 + (\det B)^2 + 2\det(A)\det(B)$. Se concluye usando de nuevo la propiedad del determinante del producto.
b) El determinante de $C+D$ es 4α. El determinante de C es $2\alpha+2$, y el determinante de D es 2. La igualdad $4\alpha = 2\alpha+2+2$ es válida únicamente para $\alpha = 2$.
c) Para $\alpha = -1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante 0 y rango 2. Es un sistema compatible indeterminado con 1 grado de libertad. Por ejemplo, $x = \lambda$ y así $y = \lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

B.2.

a) La función es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$. La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. Así, $f'(x) < 0$ para $x \in (-1,1)$ (y en ese intervalo f es decreciente); y $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ (con lo que f es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(1,\infty)$).
b) Las gráficas de f y g se cortan en los puntos de abscisa x para los que $f(x) = g(x)$, es decir, $x^3 - 3x = x(x-3) \iff x^3 - x^2 = 0$. Por tanto, los puntos de corte de ambas gráficas son $(0,0)$ y $(1,-2)$. Para $x \in (0,1)$, se tiene que $g(x) > f(x)$ (ya que, por ejemplo, $g(1/2) = -5/4 > -11/8 = f(1/2)$). El área buscada es

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 (x^2 - 3x - x^3 + 3x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

B.3.

a) Sean P_r, P_s y $\vec{v_r}, \vec{v_s}$ puntos y vectores directores de las rectas r y s, respectivamente. Las rectas se cruzan, ya que rango $(\vec{v_r}, \vec{v_s}) = 2$, rango $(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}) = 3$. La distancia entre las rectas es

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{\|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) El plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r tiene como ecuación $\pi : 3x - y + z - 18 = 0$. El punto de intersección del plano π y la recta r es $(5,-2,1)$. La ecuación paramétrica de la recta pedida es $(x,y,z) = (5, -1+\alpha, 2+\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

B.4.

a) Para que se decida el que friega en la tercera ronda uno de los dos debe acertar tres centros en las tres primeras tiradas y el otro fallarlos todos. Por lo tanto, la probabilidad pedida es: $0.25^3 \cdot 0.7^3 + 0.75^3 \cdot 0.3^3 = 0.01675$.
b) Si X representa "centros acertados en 60 lanzamientos de Antonio", X sigue una distribución binomial de parámetros $p = 0.25$, $q = 0.75$ y $n = 60$ que podemos aproximar por una normal $X' \sim N(15, 3.35)$, de manera que

$$P(X \leq 20) \approx P(X' \leq 20.5) = P(Z \leq 1.64) \approx 0.9495.$$